

サイエンスキャッスルワールド 2025 に参加しました。

2012 年に「研究者の登竜門」として誕生した中高生のための学会「サイエンスキャッスル」は、今年で 14 年目を迎え、今年は次世代研究者の取り組む研究の価値をさらに広げてサイエンスキャッスルの世界をより拡張することを目的として、初めて「サイエンスキャッスルワールド 2025」が、令和 7 年 12 月 13 日（土）、14 日（日）、東京科学大学大岡山キャンパスを会場に開催されました。

本校からは 2 年生の岸幸太朗さん、後藤浩太さん、深町功貴さんの科学物理部の 3 名が選出され、研究テーマ「素数分割の拡張について - $\delta_{n,k}(x) \lambda(n)$ -」について発表を行いました。全国的に少ない数学を研究する高校生と交流を深める貴重な体験ができました。

この研究は、加法的整数論と素数という二つの数学上の重要な分野について、新たな定理や予想を示すことで、数学の進歩に貢献することを最終的な目的としています。

研究内容は、まず素数分割の各組合せを一意に表す方法を考案し、次に、そこから導かれるいくつかの関数について、他の既知の数論的関数とどのような関係性があるのかを調べ、また、関数自体も評価を行い、そのうえで定理と予想を導いたものとなっています。



**素数分割の拡張について
- $\delta_{n,k}(x) \lambda(n)$ -**

群馬県立前橋高等学校 2年 岸幸太朗 後藤浩太 深町功貴

目的

加法的整数論は古くから研究がなされてきた分野である。黎明期には、オイラー・フェルマー、ガウスが重要な定理を発見し、その後複雑な仕組みを解き明かしてきた。だが、他の分野と比べて見ると、その発展度合いは著しく遅い。そこで特に成長が見込まれる分野である素数分割を拡張することで、加法的整数論に寄与することを目的とする。

素数分割 / δ/τ

ある自然数 n について、 n を素数のみの和で表す組み合わせの総数を $\delta(n)$ とする。素数のみの和で表す操作を素数分割という。昨年の研究ではこの関数 δ について研究していた。

そこで、素数分割について、2つの拡張を考えた。

(1) $\delta_k(m \bmod n)$ であるような素数 p のみでの素数分割の総数を算術級数の素数定理のように $\delta_{n,k}(x)$ と表記し、算術級数の δ と呼ぶ。

(2) 素数分割で現れる各々の場合をこのままでは一意に表現できない。ここで、分割によって生じる項がすべて素数であることによる場合ごとの素数分割について全項の積を求める。すると素因数分解の一意性により、素数分割の全場合を区別できる。

自然数 n の素数分割の全項の積の値として $\tau(n)$ を置く ($\tau(n)$ の値は n に対して 1通りとは限らないことに留意)。

ここで $\tau(n)$ がとる値の集合を T とすれば、 $\#T = \delta(n)$ (#は集合の濃度、今回は有限なので個数の意)となる。

特に明記しない限り $\tau(n)$ は素数分割積と呼ぶ。

拡張① $\delta_{n,k}$

算術級数の素数定理によると、 n と互いに素な k について、 $\pi_{n,k}(x) (p \equiv k \pmod{n})$ なるような素数の個数)は、どの k でも同じオーダーで現れるため、 $\delta_{n,k}(x)$ においても同様であると予想を立てた。しかし実際はそのようにならなかつた。

【右記 $\delta_{n,k}(x)$ のグラフ】
これは、エピシエフの偏りと呼ばれる、小さい素数の分布に偏りがあることが、 $\delta_{n,k}(x)$ に大きな影響を与えたと示唆される。

また、 $\delta_{n,k}(x)$ は様々な形が存在していることが分かった。何によってその形状が変わるのは研究の途中である。

ここでは、 $\delta_{n,k}(x)$ の x と $\text{mod } t$ で分類することを考える。この時、例えば $\delta_{n,k}(x)$ を $\delta_{(2k+1)^2}(x)$ で分類すると、画像の左側部分 ($\delta_{1,25}(x)$ のすべて) から規則的なパターンを持つ線部分が現われる。

このように、 $\delta_{n,k}(x)$ を $\delta_{n,k}(tx+r)$ で分類すると、 t ごとに直線が現れ、その本数に、規則性があると予想した。その一本一本の曲線を鎖と呼び、 $\delta_{n,k}(tx+r)$ で分類した、鎖の本数を、 $ch(n, k, t)$ または、 $ch(t)|_{n,k}$ で表す。(chainから)

この $ch(x)$ について、いくつかの数で計算し、複数の性質が見られた。ただし、以下の性質が重複する場合、値が複雑に変化し、どのような法則性があるか研究の途中である。

$ch(n-k) = ch(n)_k$

$ch(t) = r|_{n,k} (r > 2)$ に対して、 $\begin{cases} ch(t) = r & |_{n,k} \\ ch(s) = r & |_{n,k} \end{cases}$

$ch(st) = 1|_{n,k}$ となるような s が存在する。 $\Rightarrow ch(t+s) = r$

多くは r で、少なくとも $1 \leq s \leq r$ が言える。

加えて、
 $\delta_{n,k}(tx+r)$ が、波になる時、その一つの波の格子点の隣接する 2 点間の座標の差を t で割った値が、 $ch(t)|_{n,k}$ となる。

拡張② 入の導入

ここで、 τ の逆写像或いは(亜)逆関数としての入を考えてみる。この τ について、自然数の集合 N_1 から自然数の集合 N_2 への写像(広義)と捉えれば、

※この始点から複数出ているので正確には写像ではないが、これ以外にこの概念を形容する方法がなかったので、今回はこれも写像と呼ぶ。

t は N_1 から N_2 において全単射(行き先に重複がない行き先のすべての要素に対応する要素が始点にある)であるから、 N_1 から N_2 への逆写像を考えることができる(全射となる)。ここで逆写像を入と置いてみると、入は数の素因数を和にしたものである。

種々の数論的関数の拡張と予想と展望

$A(n) = ((Id \cdot 1_p) * 1)(n)$ と定義すると (* は Dirichlet の畳み込み)
 $\lambda(rad(n)) = A(n)$ これによって、A の議論と同様に、 $f(n)$ を平方因子を含むとき 1、そうでないとき 0 を返す関数として、素数分割積を $\tau(n)$ 、その集合を T 、 $\delta(n) = \#T$ として、 $T_\tau = f(n) * \tau(n)$ の集合とする。このとき、 $T_0 = T_n \setminus \{0\}$ 、 $\delta_0(n) = \#T_0$ と定め、 T_0 の集合の要素を返す関数を $\tau_0(n)$ とすれば、 τ_0 の逆写像、或いは(亜)逆関数は λ となる。すなわち、 λ とは素数分割の中でも、相異なる素数のみで分割したその積の逆写像である。

また、入を用いてことで、goldbach 予想、双子素数の存在、それに準ずる問題を一括にまとめることができる。

双子素数が無限に存在することと、
 $\lambda(n-1)(n-1) = 2n$
 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k | k \in \mathbb{N}, s.t.$ であるような n が無限に存在することは同値。
 $\lambda(n+k)(n-k) = 2n$ 差が 2 の素数が無限に存在することと、
 $\lambda(n+k)(n-k) = 2n$ である n に対して無限に存在することは同値。

つまり、goldbach 予想と、差が 2 の素数が無限に存在することは、先に n を定めるか、 k を定めるかという違いであって、これらの問題にも関係があると考えられる。

また、 λ は含まれている素因数の情報のみを持っていて、その素因数の指数の情報を持たないため、 λ の値から元の数を復元不可能であるので、 λ だけを公開するような鍵交換方式が存在すれば、RSA暗号と異なり、素因数分解の難解性に依存しない暗号方式を実現できる。

参考文献・謝辞

エピシエフの偏り(wikipedia)
<https://ja.wikipedia.org/w/index.php?title=%E3%82%A4%E3%82%AB%E3%82%BF%E3%82%AF&oldid=51511111>

ディリクレの畳み込み(wikipedia)
<https://ja.wikipedia.org/w/index.php?title=%E3%82%AA%E3%82%AB%E3%82%BF%E3%82%AF&oldid=51511111>

甲斐亘助教授(東北大)、並びに、名越弘准教授(群馬大)、また 1 年次にともに研究した、船岡裕太君、小野輝淳君、小林直輝君には多大なる協力を賜りましたことを、御礼申し上げます。